Équation de Bessel

(220, 221, 243)

FGN . Analyse 4 . p. 101

thm : Soit (E) : $xy'' + y' + xy = 0$

La solution f_0 de (E) valant 1 en 0 se développe en série entière autour de 0.

De plus si f est une autre solution sur un intervalle $]0, a[$, avec $a > 0$, alors (f, f_0) est libre ssi f n'est pas bornée au voisinage de 0.

démo :

<u>Étape 1</u> : Raisonnons par analyse synthèse

* <u>Analyse</u> : Si f_0 se développe en série entière, alors on a une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $R > 0$ tel que sur $]-R, R[$, on ait $f_0(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Dans ce cas, on a

$$f_0'(x) = \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1} \quad \text{et} \quad f_0''(x) = \sum_{k \geq 2} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

Si f_0 est solution de l'équation de Bessel sur $]-R, R[$, on a :

$$\begin{aligned}
0 &= x f_0''(x) + f_0'(x) + x f_0(x) \\
&= \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} + \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n \geq 1} (n+1) n \, a_{n+1} x^n + \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^n \\
&= \sum_{n \geq 1} \left((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} \right) x^n + a_1
\end{aligned}$$

Par unicité du DSE, on obtient les conditions suivantes sur les coefficients

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ (n+1)^2 a_{n+1} = -a_{n-1} \end{cases}$$

Donc $a_{2n+1} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ et

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)^2 (2n-2)^2 \cdots 2^2} = \frac{(-1)^n a_0}{4^n (n!)^2}$$

Comme $f_0(0) = a_0 = 1$, on obtient $f_0(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

* Synthèse : Cette série entière a un rayon de convergence infini.

Comme les coefficients de f_0 vérifient les équations précédentes, f_0 est bien l'unique solution maximale développable en série entière au problème de Cauchy.

Étape 2 :

Soit $a>0$ et f une autre solution de l'équation de Bessel sur $]0,a[$.

Comme f_0 est définie sur $\mathbb{R}$ et continue, elle est bornée au voisinage de 0.

Donc si (f, f_0) est liée alors f est aussi bornée au voisinage de 0.

Réciproquement, si (f, f_0) est libre.

Comme on se place sur $]0,a[$ $(x>0)$ donc $(E) \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$.

Donc l'espace des solutions de E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2, donc (f, f_0) est une base de cet espace.

Ainsi le Wronskien, $W = ff_0' - f'f_0$ ne s'annule jamais

$\forall x \in]0,a[$, on a $W'(x) = f'(x)f_0'(x) + f(x)f_0''(x) - f'(x)f_0'(x) - f''(x)f_0(x)$

$$\boxed{= -\frac{1}{x}W(x)}$$

$W(x) = Ce^{-\ln(x)}$

Donc $\exists\, C \in \mathbb{R}^*$ tq $W(x) = \frac{C}{x}$ ie $\forall x \in]0,a[$, $f(x)f_0'(x) - f'(x)f_0(x) = \frac{C}{x}$.

Supposons que f est bornée au voisinage de 0.

Comme $\lim\limits_{x\to0} f_0(x) = 1$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f_0'(x) = 0}$, on a $f'(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{-C}{x} = W(-x)$

Soit $b \in]0,a[$, la fonction $x \longmapsto \frac{-C}{x}$ est de signe constant sur $]0,b]$ et non intégrable.

Donc $f(x) - f(b) = \int_b^x f'(t)\,dt \underset{x\to0}{\sim} -C\int_b^x \frac{1}{t}\,dt = -C(\ln(x) - \ln(b))$

On a donc $f(x) \underset{x\to0}{\sim} -C\ln(x)$ d'où $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$

C'est une contradiction avec le fait que f soit bornée au voisinage de 0.

Questions : Équation de Bessel.

- $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 pour espace des solutions et Wronskien qui ne s'annule pas ?

$*\ y'' = -\frac{1}{x} y' - y$ donc si on pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ on a $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = AY$.

où $A :]0, a[\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ continue donc l'espace des solutions est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

$t \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}$

$*$ Wronskien : $\det \begin{pmatrix} f & f_0 \\ f' & f_0' \end{pmatrix} = f f_0' - f' f_0$ et ne s'annule jamais car (f, f_0) est libre donc indépendantes.

- $W'(x) = -\frac{1}{x} W(x)$?

$W'(x) = f'f_0' + f f_0'' - f'' f_0 - f' f_0'$ or $f'' = -\frac{1}{x} f' - f$ et $f_0'' = -\frac{1}{x} f_0' - f_0$ car f et f_0 solutions de (E).

Donc $W'(x) = \cancel{f'f_0'} + f\left(-\frac{1}{x} f_0' - f_0\right) - \left(-\frac{1}{x} f' - f\right) f_0 - \cancel{f'f_0'}$

$= -\frac{1}{x} f_0' f - \cancel{f_0 f} + \frac{1}{x} f' f_0 + \cancel{f f_0} = -\frac{1}{x}\left(f f_0' - f' f_0\right) = -\frac{1}{x} W(x)$.

$W'(x) = -\frac{1}{x} W(x) \iff \frac{W'(x)}{W(x)} = -\frac{1}{x}$

$\iff \ln(W(x)) = -\ln(x) = \ln(1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$\iff W(x) = \frac{C}{x}$.

- $\lim\limits_{x \to 0} f_0'(x) = 0$

On a $f_0'(x) = \sum\limits_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} \cdot 2n\ x^{2n-1}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f_0'(x) = 0$.

- Rayon de convergence infini ?

On a $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{4(n)!^2}$ On pose $b_n = \frac{(-1)^n}{4\, n!^2}$ et on utilise la règle de Cauchy

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^n (n!)^2}{4^{n+1}((n+1)!)^2} = \frac{1}{4(n+1)^2} \longrightarrow 0$ Or d'après la règle d'Hadamard le rayon est la racine de celui de b_n.

Ainsi le rayon de convergence est infini